

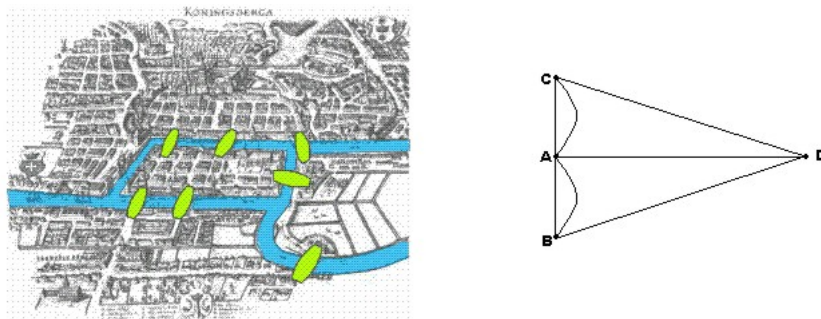
Grafi e loro applicazioni

Alberto Amato (amato@dmi.unict.it)

Giorgio Ragusa (gragusa@dmi.unict.it)

1 Grafi euleriani

La teoria dei grafi trova oggi numerose applicazioni in problemi connessi al trasporto di merci e all'ispezione e manutenzione di sistemi distribuiti di reti elettriche, telematiche e postali. La sua origine storica si fa risalire al celebre problema dei 7 ponti di Königsberg, città natale di KANT e di HILBERT, nella Prussia orientale. La città si trova alla confluenza di due fiumi, comprende un isolotto ed è divisa in quattro zone connesse tra di loro da sette ponti come indicato nella figura. I cittadini di Königsberg si chiesero se fosse possibile determinare il percorso di una passeggiata che, partendo da un dato punto, ad esempio dalla zona A, consentisse di tornare al punto di partenza dopo aver attraversato tutti i ponti una e una sola volta.



EULERO associò alla situazione reale il multigrafo rappresentato in figura nel lavoro *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* del 1736, in cui compare per la prima volta il termine *grafo*, dimostrò che il problema non aveva soluzioni.

Dato un insieme non vuoto e finito V e un sottoinsieme non vuoto \mathbf{S} di $P(V)$ tale che, per ogni $s \in \mathbf{S}$, si ha $1 \leq |s| \leq 2$, la coppia $\mathbf{G} = (V, \mathbf{S})$ dicesi un *grafo*. Gli elementi di V diconsi *vertici* o *nodi*, gli elementi di \mathbf{S} diconsi *spigoli* o *archi* del grafo.

Gli elementi di uno spigolo diconsi *estremi* e si suole dire che lo spigolo è *incidente* in tali estremi. Due vertici che sono estremi di uno stesso spigolo si dicono *adiacenti*, mentre due spigoli aventi un vertice in comune diconsi *incidenti*, due spigoli non aventi vertici in comune diconsi *paralleli*. Ogni spigolo

contenente un solo vertice dicesi un *cappio*.

Un grafo si dice completo (o clique) se due qualsiasi suoi vertici sono adiacenti, regolare di grado r se tutti i suoi vertici hanno grado r , bipartito se i suoi vertici sono divisi in due sottoinsiemi non vuoti V_1, V_2 tali che tutti gli spigoli del grafo congiungono vertici appartenenti uno al primo sottoinsieme ed uno al secondo.

Si ammette in genere che in un grafo due vertici adiacenti possano essere estremi di più spigoli, come accade nell'esempio dei ponti di Konisberg. In questo caso si usa il termine *multigrafo*. Un grafo privo di cappi e di spigoli multipli dicesi *semplice*.

Dato un vertice x di \mathbf{G} , il numero di spigoli incidenti in x dicesi *grado* di x e si denota con il simbolo $d(x)$. Un vertice avente grado zero dicesi *isolato*, un vertice avente grado uno dicesi *pendente*. Dalle definizioni segue immediatamente il seguente:

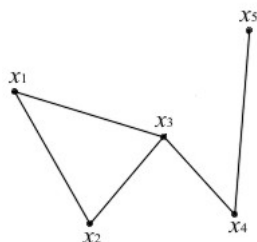
Lemma 1.1. *La somma dei gradi di un grafo senza cappi è uguale al doppio del numero degli spigoli.*

Dato un grafo $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ e due vertici x, y distinti di \mathbf{G} , una sequenza di vertici $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k$ e di spigoli s_1, s_2, \dots, s_k di \mathbf{G} tali che:

$$\begin{aligned} s_1 \text{ ha come estremi } x_0 \text{ e } x_1; \\ s_2 \text{ ha come estremi } x_1 \text{ e } x_2; \\ \dots \\ s_k \text{ ha come estremi } x_{k-1} \text{ e } x_k \end{aligned}$$

dove $x_0=x, x_k=y$, dicesi un *cammino* o una *catena di \mathbf{G} congiungente x con y* .

In tal caso, si suole dire che y è *raggiungibile* da x e il numero k dicesi *lunghezza* del cammino. Se $x=y$, il cammino dicesi *chiuso*, altrimenti dicesi *aperto*. Inoltre, se, per ogni coppia di numeri distinti i, j appartenenti a $\{0, 1, \dots, k\}$, di cui almeno uno non inferiore a 1 e non superiore a $k-1$, si ha $x_i \neq x_j$, il cammino dicesi *elementare*. Se, per ogni coppia di numeri distinti i, j appartenenti a $\{1, 2, \dots, k\}$, si ha $s_i \neq s_j$, il cammino dicesi *semplice*. Un cammino chiuso elementare dicesi un *ciclo*.



Ovviamente ogni cammino elementare è semplice ma non viceversa. Ad esempio, nel grafo rappresentato nella figura precedente, il cammino

$$s_1 \text{ con estremi } x_3 \text{ e } x_1;$$

s_2 con estremi x_1 e x_2 ;

s_3 con estremi x_2 e x_3 ;

s_4 con estremi x_3 e x_4

è semplice ma non elementare.

Quando non è necessario, nella descrizione di un cammino, è sufficiente indicare solo i vertici.

Inoltre, si conviene che, dato un vertice x , il singoletto $\{x\}$ è un cammino congiungente x con sé avente lunghezza zero.

Un grafo $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ tale che per ogni $x, y \in V$, esiste un cammino congiungente x con y , dicesi *connesso*. In tal caso, tra i cammini congiungenti due arbitrari vertici del grafo x e y , ve ne sono alcuni di lunghezza minima h . Tali cammini diconsì *linee geodetiche* di \mathbf{G} e h dicesi *distanza* tra x e y .

Dato un grafo $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$, introduciamo in V la seguente relazione:

$$R = \{(x, y) \in V \text{ per cui esiste un cammino di } \mathbf{G} \text{ congiungente } x \text{ con } y\}.$$

Si verifica facilmente che tale relazione è di equivalenza. L'insieme V risulta quindi partizionato in classi, ognuna delle quali contiene un vertice del grafo e tutti quelli che sono da esso raggiungibili. Tali classi diconsì *componenti connesse* di \mathbf{G} e il loro numero dicesi *numero di connessione* di \mathbf{G} .

Si chiama albero un grafo aciclico connesso. Ogni albero finito (cioè con un numero finito di vertici) ha almeno un vertice di grado 1 (foglia). Sottraendo un qualsiasi spigolo ad un albero si ottiene un grafo non connesso. Un albero finito si dice binario se ha un vertice (la radice) di grado 2, e gli altri di grado 1 o 3.

Sia $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ un grafo. Un cammino di \mathbf{G} che percorre tutti gli spigoli di \mathbf{G} una e una sola volta dicesi *euleriano*. Se \mathbf{G} ha almeno un cammino euleriano, \mathbf{G} dicesi *semieuleriano*; se \mathbf{G} ha almeno un cammino chiuso euleriano, \mathbf{G} dicesi *euleriano*.

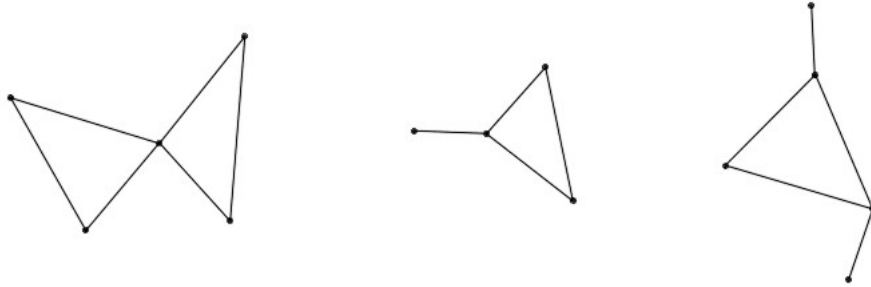
Ovviamente ogni grafo euleriano è semieuleriano. Sia $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ un grafo e sia \mathbf{G}' il grafo ottenuto da \mathbf{G} eliminando i cappi. Ovviamente \mathbf{G}' è euleriano o semieuleriano se e solo se lo è \mathbf{G} , quindi nello studio dei grafi euleriani, si può supporre, senza ledere in alcun modo la generalità della trattazione, che il grafo sia senza cappi.

In figura sono rappresentati un grafo euleriano, un grafo semieuleriano ma non euleriano e un grafo non semieuleriano.

Il seguente teorema caratterizza i grafi euleriani:

Teorema 1.1. *Dato un grafo connesso $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$, le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- i) \mathbf{G} è euleriano;*
- ii) Ogni vertice di \mathbf{G} ha grado pari;*
- iii) Esiste una partizione di \mathbf{S} in cicli.*



Dimostrazione Sarà fatta in tre passi: $i \rightarrow ii$; $ii \rightarrow iii$; $iii \rightarrow i$.

$i \rightarrow ii$) - Per ipotesi, \mathbf{G} contiene almeno un cammino chiuso euleriano, ed essendo G connesso, tale cammino chiuso attraversa tutti i vertici di \mathbf{G} . Ognuno di tali vertici può essere quindi considerato come estremo del cammino chiuso stesso, e, dato che il cammino chiuso percorre tutti gli spigoli di \mathbf{G} una e una sola volta, il grado di ogni vertice è un numero pari.

$ii \rightarrow iii$) - Per ipotesi, ogni vertice di \mathbf{G} ha grado pari. Se \mathbf{G} fosse aciclico, esso sarebbe, per definizione, un albero, e quindi, per un noto teorema, \mathbf{G} avrebbe almeno un vertice di grado uno, il che è escluso dall'ipotesi. Quindi \mathbf{G} ha almeno un ciclo Z_1 . Se \mathbf{G} coincide con Z_1 , la tesi è provata. Se no, sia \mathbf{G}_1 il grafo ottenuto da \mathbf{G} sopprimendo tutti gli spigoli di Z_1 e tutti i vertici isolati. Ovviamente, \mathbf{G}_1 è connesso e tutti i suoi vertici hanno grado pari, cosicchè, iterando il ragionamento fatto su \mathbf{G} , esiste in \mathbf{G}_1 almeno un ciclo Z_2 . Così procedendo si trova che l'insieme \mathbf{S} è partizionato in cicli Z_1, Z_2, \dots, Z_k .

$iii \rightarrow i$) - Sia Z_1 uno dei cicli della partizione. Se $k=1$, la tesi è provata. Se no, considerato che \mathbf{G} è connesso, esiste un ciclo Z_2 della partizione avente almeno un vertice x in comune con Z_1 . Il cammino chiuso che da x percorre in sequenza tutti gli spigoli di Z_1 e Z_2 contiene tutti i loro spigoli una e una sola volta. Se $k=2$, la tesi è provata. Se no, iterando il ragionamento fatto prima, esiste un ciclo Z_3 della partizione avente almeno un vertice y in comune con Z_1 o Z_2 , ad esempio Z_1 . Il cammino chiuso che da x percorre in sequenza tutti gli spigoli di Z_1 fino ad incontrare y , tutti gli spigoli di Z_3 , tutti gli eventuali rimanenti spigoli di Z_1 e tutti gli spigoli di Z_2 contiene gli spigoli di Z_1, Z_2, Z_3 una e una sola volta. Così procedendo si perviene a un cammino chiuso euleriano di \mathbf{G} . \square

Teorema 1.2. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo connesso $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$, sia semieuleriano è che esistano almeno $|V|-2$ vertici di \mathbf{G} aventi grado pari.*

Dimostrazione - Condizione necessaria. Per ipotesi, esiste un cammino euleriano π congiungente due vertici x, y di \mathbf{G} . Se $x=y$, \mathbf{G} è euleriano, e quindi, in virtù del teorema precedente, tutti i suoi vertici hanno grado pari. Se $x \neq y$, si consideri il grafo \mathbf{G}' avente per spigoli quelli di \mathbf{G} e un ulteriore spigolo avente estremi x e y . Il cammino costituito da π e da tale spigolo costituisce un cammino chiuso euleriano di \mathbf{G}' , e quindi, per il teorema precedente, tutti i vertici di \mathbf{G}' hanno grado pari. Il grado dei vertici di \mathbf{G}' distinti da x e y è uguale ovviamente al grado degli stessi quali vertici di \mathbf{G} , e quindi esistono almeno $|V|-2$ vertici di \mathbf{G} aventi grado pari.

Condizione sufficiente. Il numero dei vertici di \mathbf{G} aventi grado pari non può essere $|V|-1$, perchè, altrimenti, la somma dei gradi dei vertici di \mathbf{G} sarebbe un numero dispari, il che è impossibile. Quindi i vertici di \mathbf{G} aventi grado pari sono $|V|$ o $|V|-2$. Nel primo caso, in virtù del teorema 1, \mathbf{G} è euleriano, e quindi semieuleriano. Nel secondo caso, detti x, y i vertici di \mathbf{G} di grado dispari e considerato il grafo \mathbf{G}' avente per spigoli quelli di \mathbf{G} e un ulteriore spigolo avente estremi x e y , tutti i vertici di \mathbf{G}' hanno grado pari, e quindi, per il teorema precedente, \mathbf{G}' è euleriano. Esiste quindi un cammino chiuso euleriano di \mathbf{G}' , e dunque, ovviamente, un cammino euleriano di \mathbf{G} . \square

Sia $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ un grafo avente p componenti connesse. Uno spigolo s di \mathbf{G} tale che il numero delle componenti connesse del grafo $\mathbf{G}-s$ è $p+1$ dicesi un *istmo* o *ponte* di \mathbf{G} .

Algoritmo per la costruzione di un cammino chiuso euleriano - Sia $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ un grafo euleriano avente m spigoli. Per costruire un cammino chiuso euleriano di \mathbf{G} si può seguire il seguente algoritmo:

- 1) Siano x_1, x_2 due vertici adiacenti di \mathbf{G} e sia s_1 uno spigolo avente estremi x_1 e x_2 ;
- 2) Sia $i \geq 2$ e sia \mathbf{G}_i il grafo ottenuto da \mathbf{G} sopprimendo gli spigoli s_1, \dots, s_{i-1} ed eliminando gli eventuali vertici isolati; sia $s_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ l'unico spigolo di \mathbf{G}_i incidente in x_i oppure, nel caso che ve ne siano più di uno, uno spigolo tra quelli incidenti in x_i che non sia un istmo per \mathbf{G}_i ;
- 3) Se $i < m$, si incrementi di un'unità il valore di i e si ritorni al passo 2;
- 4) Se $i = m$, la sequenza di spigoli s_1, \dots, s_m costituisce un cammino chiuso euleriano di \mathbf{G} .

Teorema 1.3. *L'algoritmo su esposto è corretto e restituisce un cammino chiuso euleriano di \mathbf{G} .*

2 Alberi

Si chiama foresta un grafo aciclico.

Teorema 2.1. *In una foresta con v vertici, s spigoli, p componenti connesse si ha $v - s = p$.*

Dimostrazione La i -esima componente connessa è un albero e quindi, con ovvio significato dei simboli, si ha $v_i - s_i = 1$, da cui $\sum (v_i - s_i) = p$. D'altra parte si ha $\sum v_i = v, \sum s_i = s$. Sostituendo si ottiene $v - s = p$. \square

PROBLEMA DEI COLLEGAMENTI: Dato un insieme di nodi (città, stazioni ferroviarie, computer, etc.) costruire una rete di collegamento (stradale, ferroviario, elettrico, etc.) fra di essi che abbia costo minimo, conoscendo il costo del collegamento fra due qualsiasi di essi.

E' chiaro che questa rete che occorre costruire deve essere un grafo semplice (gli spigoli multipli ed i cappi sarebbero inutili sprechi), connesso (tutti i nodi debbono essere collegati fra loro) ed aciclico (i cicli creerebbero sprechi), cioè un albero che passi da tutti i nodi.

Dato un grafo connesso \mathbf{G} , si dice albero ricoprente o albero di connessione di \mathbf{G} un qualsiasi grafo parziale su \mathbf{G} che sia un albero. Quindi esso è un albero che contiene tutti i vertici del grafo, ma degli archi ne contiene soltanto un sottoinsieme necessario per connettere tra loro tutti i vertici con uno e un

solo cammino. Infatti ciò che differenzia un grafo da un albero è che in quest'ultimo non sono presenti cammini multipli tra due nodi. L'albero ricoprente è meglio noto con il termine inglese *Spanning tree* (ST). Nel caso in cui gli archi siano pesati, cioè a ciascuno di essi sia associato un numero reale positivo detto peso o costo, definiamo albero ricoprente minimo (in inglese *minimum spanning tree*, MST) l'albero ricoprente di costo minimo, dove il costo è la somma dei costi di tutti gli archi che appartengono a tale albero. Nel caso in cui il grafo non sia connesso, cioè sia il risultato dell'unione di più grafi connessi, si può ancora definire una foresta ricoprente minima come l'unione di alberi ricoprenti individuati sui singoli grafi connessi. In grafi connessi foresta ed albero ricoprente coincidono.

Algoritmo per la determinazione del MST in un grafo completo pesato:

INPUT: Un grafo completo pesato K_n ;

OUTPUT: Un MST del grafo completo pesato K_n ;

Passo 1: Ordinare gli spigoli del grafo K_n in modo tale che il costo di ciascuno di essi sia non maggiore del successivo: $c(s_i) \leq c(s_{i+1})$;

Passo 2: Cancellare gli spigoli s_i tali che il grafo generato dagli spigoli $\{s_1, s_2, \dots, s_{i-1}\}$ non è aciclico.

E' chiaro che il grafo ottenuto applicando il precedente algoritmo è un albero A ricoprente K_n e quindi ha $n-1$ spigoli. Per provare che esso ha costo minimo, occorre prima provare il seguente:

Lemma 2.1. *Se T è un albero ricoprente di costo minimo con $k-1$ ($0 < k < n$) spigoli in comune con A , si può determinare un albero di costo minimo T' con k spigoli in comune con A .*

Dimostrazione Sia s_k il primo (relativamente agli indici) spigolo di A che non è spigolo di T , allora nel grafo $T + \{s_k\}$ esiste un ciclo C contenente s_k . Ma, essendo A aciclico, esiste nel ciclo C uno spigolo s' che non è spigolo di A . Consideriamo il grafo $T' = T + \{s_k\} - \{s'\}$. Il grafo $T - s'$ è sconnesso, ma, visto che s' appartiene ad un ciclo del grafo $T + \{s_k\}$, T' è connesso e con $n - 1$ spigoli, quindi è un albero ricoprente. Il suo costo $c(T')$ è $c(T') = c(T) + c(s_k) - c(s')$ e quindi $c(T') \leq c(T)$, poiché $c(s_k) \leq c(s')$. Quest'ultima disequaglianza segue dal fatto che nell'algoritmo s_h ha il costo minimo fra gli spigoli di $K_n - \{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}\}$ che non formano cicli con $\{s_1, s_2, \dots, s_{k-1}\}$ e dal fatto che s' è proprio uno di questi spigoli. Ma dalla disequaglianza $c(T') \leq c(T)$ e dal fatto che T ha costo minimo per ipotesi segue che anche T' ha costo minimo ed è quindi un albero ricoprente di costo minimo avente k spigoli in comune con A . □

Da questo lemma seguente banalmente il seguente

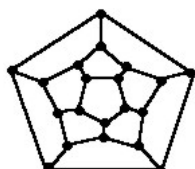
Teorema 2.2. *L'albero A è ricoprente minimo.*

3 Grafi hamiltoniani

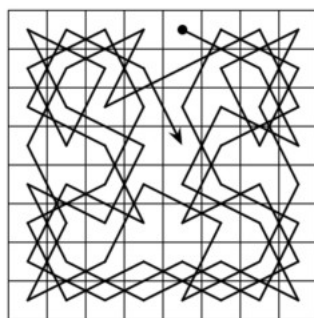
Lo studio dei cammini hamiltoniani ebbe origine dal cosiddetto problema del commesso viaggiatore, introdotto nel 1859 da WILLIAM HAMILTON, il quale costruì uno strano rompicapo utilizzando un dodecaedro regolare di legno.

Si trattava di un poliedro platonico con dodici facce pentagonali regolari e venti vertici, ciascuno dei quali era contrassegnato dal nome di una città. Il problema consisteva nel trovare un itinerario lungo gli

spigoli che toccasse ciascuna città una e una sola volta, eventualmente fissando alcuni vertici da visitare per primi allo scopo di rendere il gioco più difficile. Per motivi di praticità, HAMILTON produsse anche una versione più maneggevole del rompicapo, in cui il poliedro fu sostituito da un grafo planare isomorfo al grafo costituito dagli spigoli del dodecaedro.



Un altro problema relativo ai grafi hamiltoniani è quello di realizzare, muovendo un cavallo su una scacchiera vuota, un cammino hamiltoniano, ossia un percorso che visiti ogni casa della scacchiera una e una sola volta. Uno di tali cammini è schematizzato qui sotto.



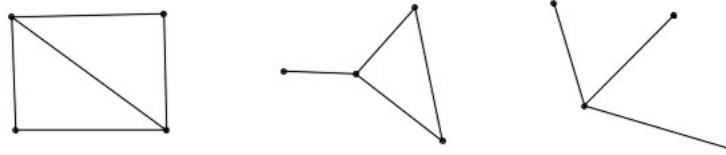
I problemi relativi all'esistenza di cammini euleriani o hamiltoniani di un grafo, presentano, a dispetto della loro apparente somiglianza, difficoltà profondamente diverse: infatti, per decidere se un grafo è euleriano, è sufficiente esaminare il grado dei suoi vertici, mentre, come si è detto, non esiste un criterio generale per stabilire se un grafo è hamiltoniano.

Sia $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ un grafo. Un cammino di \mathbf{G} che attraversa tutti i vertici di \mathbf{G} una e una sola volta dicesi *hamiltoniano*. Se \mathbf{G} ha almeno un cammino hamiltoniano, \mathbf{G} dicesi *semihamiltoniano*; se \mathbf{G} ha almeno un ciclo hamiltoniano, \mathbf{G} dicesi *hamiltoniano*.

Ovviamente ogni grafo hamiltoniano è semihamiltoniano.

Nella figura seguente sono rappresentati un grafo hamiltoniano, un grafo semihamiltoniano ma non hamiltoniano, un grafo non semihamiltoniano.

I teoremi del paragrafo precedente costituiscono importanti caratterizzazioni di grafi euleriani e semieuleriani, ed è ragionevole attendersi che esistano condizioni analoghe per i grafi hamiltoniani. Invece, la ricerca di simili caratterizzazioni per i grafi hamiltoniani è uno dei più interessanti problemi aperti della teoria dei grafi ed il problema di stabilire se un grafo è hamiltoniano è un problema NP-completo.



Lemma 3.1. *Dato un grafo, $G=(V, S)$ è sempre possibile aggiungere a V un certo numero di vertici e collegare ciascuno di essi con tutti i vertici di G in modo che il grafo risultante sia hamiltoniano.*

Dimostrazione Sia $V=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Se x_1, x_2 sono adiacenti, sia s_1 uno spigolo di G avente estremi x_1, x_2 ; se x_1, x_2 non sono adiacenti, sia G_1 il grafo ottenuto da G aggiungendo a V un vertice p_1 distinto da x_1, x_2, \dots, x_n e collegando tale vertice con tutti i vertici di G e siano s_2 uno spigolo avente estremi x_1, p_1 e s_3 uno spigolo avente estremi p_1, x_2 . Ripetendo lo stesso ragionamento sui vertici x_2, x_3 e così procedendo per gli altri, si perviene ovviamente a un ciclo hamiltoniano. \square

Il matematico Ore provò nel 1960 la seguente condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché un grafo semplice sia hamiltoniano:

Teorema 3.1. *Condizione sufficiente affinché un grafo semplice G con $n \geq 3$ vertici sia hamiltoniano è che per ogni coppia x, y di vertici non adiacenti la somma dei loro gradi sia almeno n .*

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che G non sia hamiltoniano e dimostriamo che $deg_G(x) + deg_G(y) < n$ per qualche coppia x, y di vertici non adiacenti. Il lemma precedente consente di ottenere a partire da G un grafo H non hamiltoniano ma tale che aggiungendovi uno spigolo (x, y) si ottiene un ciclo hamiltoniano $x, y, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, x$. Notiamo che $(y, a_i) \in E(H) \Rightarrow (x, a_{i-1}) \notin E(H)$, altrimenti $y, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-2}, x, a_{i-1}, a_{i-2}, \dots, a_1, y$ sarebbe un ciclo hamiltoniano in H . Dunque per ogni vertice adiacente ad y in H , ne esiste uno non adiacente ad x in H e quindi, visto che $(x, y) \notin E(H)$, si ha $deg_H(x) + deg_H(y) < n$, ma essendo $deg_G(v) \leq deg_H(v)$ per ogni vertice v di G , si ha $deg_G(x) + deg_G(y) < n$. \square

Corollario 3.1. [Dirac, 1952] *Un grafo semplice $G=(V, S)$ con n vertici ciascuno dei quali ha grado non inferiore a $\frac{1}{2}n$ è hamiltoniano.*

Corollario 3.2. [Bondy e Chvatal, 1976] *Supponiamo che G è un grafo con $n \geq 3$ vertici e con x, y vertici non adiacenti tali che $deg_G(x) + deg_G(y) \geq n$. Allora G è hamiltoniano se e solo se $G + (x, y)$ è hamiltoniano.*

Si chiama chiusura di un grafo semplice G il grafo ottenuto da esso aggiungendovi in successione spigoli (x, y) per ogni coppia di vertici tali che $deg(x) + deg(y) \geq n$ fino a far in modo che non vi siano coppie di vertici soddisfacenti questa condizione.

Corollario 3.3. *Un grafo semplice G è hamiltoniano se e solo se la sua chiusura lo è.*

Teorema 3.2. *Se G è un grafo con almeno tre vertici e chiusura completa, allora G è hamiltoniano.*

Tutte le condizioni viste sopra sono sufficienti, ma non necessarie, poichè ad esempio il ciclo C_5 è hamiltoniano ma non verifica nessuna delle condizioni sopra esposte, tranne quella del corollario 2.3 che è però tautologica, visto che la chiusura di C_5 è lo stesso C_5 .

Il problema del commesso viaggiatore, o TSP (dall'inglese Traveling Salesman Problem) è un problema di teoria dei grafi, uno dei casi di studio tipici dell'informatica teorica e della teoria della complessità. Il nome nasce dalla sua più tipica rappresentazione: data una rete di città, connesse tramite delle strade, trovare il percorso di minore distanza che un commesso viaggiatore deve seguire per visitare tutte le città una e una sola volta. Espresso nei termini della teoria dei grafi è così formulato: dato un grafo completo pesato, trovare il ciclo hamiltoniano con peso minimo.

Il problema è di considerevole importanza pratica, al di là delle ovvie applicazioni nella logistica e nei trasporti. Un esempio classico è la costruzione di circuiti stampati, nella pianificazione del percorso del trapano per creare i fori nella piastra. Nelle applicazioni di foratura o di rifinitura automatica eseguite da robot, le "città" sono pezzi da rifinire o fori (anche di varie dimensioni) da praticare, e il "costo di viaggio" include i tempi morti (ad esempio il tempo che il robot impiega, se necessario per cambiare la punta con cui lavora).

Non esistono algoritmi efficienti per la risoluzione del TSP, l'unico metodo di risoluzione è rappresentato dall'enumerazione totale, ovvero nell'elaborazione di tutti i possibili cammini sul grafo per la successiva scelta di quello migliore. Tuttavia, la complessità dell'operazione la rende impraticabile per grafi di dimensioni comuni nei problemi reali: in un grafo di n nodi, bisognerà calcolare, nel caso peggiore in cui ogni nodo è connesso con tutti gli altri, $n!$ possibili cammini. Nel marzo 2005, il TSP riguardante la visita di tutti i 33.810 punti in una scheda di circuito fu risolto usando CONCORDE: fu trovato un percorso di 66.048.945 unità, e provato che non poteva esserne uno migliore. L'esecuzione richiese approssimativamente 15,7 anni CPU. Ad oggi sono stati progettati vari algoritmi approssimati, che hanno un'"alta" probabilità di produrre una "buona" soluzione "velocemente". Ciò in particolare nel TSP euclideo o TSP planare in cui i pesi degli spigoli sono delle distanze euclidee che soddisfano la disuguaglianza triangolare: per tre città qualsiasi A, B e C, la distanza tra A e C deve essere al massimo la distanza da A a B più la distanza da B a C.

Con questa ipotesi ecco un algoritmo di approssimazione che produce sempre un percorso lungo al massimo il doppio del percorso ottimo:

ALGORITMO 2-APPROSSIMATO PER IL TSP PLANARE INPUT: Un grafo completo pesato K_n ; OUTPUT: Un ciclo hamiltoniano di costo al massimo doppio di quello minimo; Passo 1: costruire l'albero ricoprente minimo A; Passo 2: duplicare tutti i suoi archi, ottenendo un multigrafo euleriano E; Passo 3: trovare in E un circuito euleriano; Passo 4. trasformare il circuito euleriano in un ciclo hamiltoniano H nel seguente modo: percorrendo il circuito euleriano, ogni volta che si sta per toccare un vertice già visitato x_i , sostituire il cammino $[x_{i-1}, x_i, \dots, x_{i+h}]$ con lo spigolo $\{x_{i-1}, x_{i+h}\}$, dove x_{i+h} è il primo vertice non ancora visitato o, in assenza di questo ultimo, il vertice di partenza del circuito.

Teorema 3.3. *Il costo del ciclo ottenuto con il precedente algoritmo è al massimo doppio di quello del ciclo hamiltoniano di peso minimo.*

Dimostrazione Indichiamo con M il ciclo hamiltoniano di peso minimo e con A l'albero ricoprente di peso minimo, mentre $c(M)$ e $c(A)$ indicheranno i rispettivi costi. Il ciclo M , essendo hamiltoniano, è costituito da n archi. Togliendo un qualsiasi arco da M si ottiene dunque un albero ricoprente, di costo minore od uguale a quello di M . Quindi si ha $c(A) \leq c(M)$. Ora, dato l'albero A , raddoppiamo tutti i suoi archi, ottenendo così un multigrafo E . Tale multigrafo sarà euleriano, in quanto tutti i nodi hanno grado pari. Il peso di un circuito euleriano su tale multigrafo è pari alla somma dei pesi di tutti gli archi, ossia $2c(A)$. Qual'è il costo del ciclo hamiltoniano H ? Il ciclo H segue molti archi del ciclo euleriano, ma ne "bypassa" alcuni. Grazie alla disuguaglianza triangolare, allora, possiamo concludere che la lunghezza complessiva del ciclo hamiltoniano così ottenuto, $c(H)$, non è superiore a quella del ciclo euleriano, ossia: $c(H) \leq 2c(A)$ e dunque, ricordando che $c(A) \leq c(M)$, si ha $c(H) \leq 2c(M)$. \square

Nel 1980 Christofides migliorò questo algoritmo sostituendo il passo 2 con il seguente

Passo 2 (dell'algoritmo di Christofides): Calcola l'1-fattore di peso minimo sul sottografo di K_n indotto da tutti i vertici che hanno grado dispari in A ed unisci tale matching perfetto ad A ottenendo il grafo euleriano E ;

Si dimostra che il ciclo hamiltoniano ottenuto con questa sostituzione ha un costo che è al massimo 1,5 volte quello ottimale.

4 Accoppiamenti e fattorizzazioni

Problema dei matrimoni: Dato un insieme finito V_1 di ragazze e un insieme finito V_2 di ragazzi e un grafo bipartito \mathbf{G} su V_1, V_2 i cui spigoli congiungono i ragazzi e le ragazze che si conoscono tra di loro, sotto quali condizioni è possibile sposare ogni ragazza di V_1 con un ragazzo di V_2 che egli conosce?

Ad esempio, se V_1 è costituito dalle 4 ragazze b_1, b_2, b_3, b_4 , V_2 è costituito dai 5 ragazzi g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 e gli spigoli del grafo bipartito che rappresentano le amicizie sono $\{b_1, g_1\}, \{b_1, g_4\}, \{b_1, g_5\}, \{b_2, g_1\}, \{b_3, g_2\}, \{b_3, g_3\}, \{b_3, g_4\}, \{b_4, g_2\}, \{b_4, g_4\}$, una possibile soluzione è che b_1 sposi g_4 , b_2 sposi g_1 , b_3 sposi g_3 e b_4 sposi g_2 .

Analogo è il problema dei lavori: Consideriamo un insieme P di persone e un insieme L di lavori e supponiamo che ciascuna persona sia qualificata a fare soltanto alcuni lavori dell'insieme L . Come possiamo fare ad assegnare i lavori alle persone, in modo tale che il massimo numero di persone possa ottenere un lavoro per cui è qualificato?

Siano V_1, V_2 due insiemi non vuoti, finiti e disgiunti, \mathbf{G} un grafo bipartito su V_1, V_2 . Ogni applicazione iniettiva $f: V_1 \rightarrow V_2$ tale che per ogni $x \in V_1$, $f(x)$ è adiacente a x in \mathbf{G} , dicesi un *accoppiamento completo* su V_1 .

Dato un vertice v di un grafo $G = (V, S)$ si chiama *intorno di v in G* l'insieme dei vertici di G adiacenti al vertice v e si chiama *intorno di un insieme di vertici A in G* l'unione degli intorni dei vertici di A in G . Denotiamo con A' l'intorno di A .

Il seguente teorema, dimostrato da Hall nel 1935, stabilisce una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un accoppiamento completo su V_1 .

Teorema 4.1. *Dati due insiemi non vuoti, finiti e disgiunti V_1, V_2 e un grafo bipartito \mathbf{G} su V_1, V_2 , condizione necessaria e sufficiente affinché esista un accoppiamento completo su V_1 è che, per ogni sottoinsieme non vuoto A di V_1 , si abbia $|A'| \geq |A|$.*

Dimostrazione Condizione necessaria. Per ipotesi, esiste una funzione iniettiva $f: V_1 \rightarrow V_2$. Se esistesse un sottoinsieme non vuoto A di V_1 per cui $|A'| < |A|$, allora esisterebbe $z \in A$ tale che $f(z) \notin A'$, e quindi $f(z)$ non è adiacente a z in \mathbf{G} , il che nega che f sia un accoppiamento completo.

Condizione sufficiente. Sia m la cardinalità di V_1 . Se $m=1$, la tesi è vera; se no, ragioniamo per induzione, supponendo che il teorema sia vero per ogni sottoinsieme non vuoto di V_1 avente cardinalità minore di m . Si possono verificare i seguenti due casi: 1) Per ogni sottoinsieme proprio A di V_1 , $|A'| \geq |A| + 1$; 2) Esiste un sottoinsieme proprio A di V_1 tale che $|A'| = |A|$.

Nel primo caso, considerato un arbitrario $x \in V_1$ e associato ad esso un qualsiasi elemento y di V_2 adiacente a x in \mathbf{G} , per ogni sottoinsieme non vuoto A di $V_1 - \{x\}$, che ha cardinalità $m-1$, l'insieme dei vertici di $V_2 - \{y\}$ che sono estremi di uno spigolo di \mathbf{G} incidente in A ha cardinalità non inferiore a quella di A , e quindi, per l'ipotesi induttiva, esiste un accoppiamento completo f definito su $V_1 - \{x\}$ e a valori in $V_2 - \{y\}$. L'applicazione ottenuta con la posizione $f(x) = y$ è ovviamente un accoppiamento completo su \mathbf{G} .

Supponiamo adesso che esista un sottoinsieme proprio A di V_1 avente cardinalità k , ovviamente minore di m , per cui $|A'| = |A| = k$. Per ipotesi, per ogni sottoinsieme B di A , $|B'| \geq |B|$, e quindi, per l'ipotesi induttiva, esiste un accoppiamento completo $f: A \rightarrow A'$. Per ogni sottoinsieme C di $V_1 - A$ avente h elementi ($h \leq m - k$), l'insieme degli elementi di $V_2 - A'$ adiacenti in \mathbf{G} a qualche elemento di C deve essere non inferiore a h , perchè, altrimenti, si avrebbe $|(A \cup C)'| \leq |A'| + |C'| < k + h = |A \cup C|$, il che è contro l'ipotesi. Ne segue che, per l'ipotesi induttiva, esiste un accoppiamento completo $g: V_1 - A \rightarrow V_2 - A'$, e quindi ovviamente anche un accoppiamento completo su V_1 . \square

Generalizziamo ora il problema per grafi qualsiasi.

Sia $\mathbf{G} = (V, \mathbf{S})$ un grafo semplice. Due spigoli di \mathbf{G} che non hanno alcun estremo in comune si dicono *paralleli*. Ogni sottoinsieme non vuoto di \mathbf{S} costituito da spigoli a due a due paralleli dicesi un *accoppiamento* (o *matching*) di \mathbf{G} . Ogni accoppiamento \mathbf{T} di \mathbf{G} tale che, per ogni $x \in V$, esiste uno spigolo di \mathbf{T} incidente in x , dicesi un 1-fattore (o *perfect matching*) di G . Se ad un grafo (V, \mathbf{S}) si sottrae un sottoinsieme dei vertici e gli spigoli che li contengono si ottiene un sottografo, mentre se si sottrae solo un sottoinsieme degli spigoli, si ottiene un grafo parziale. Un 1-fattore è dunque un grafo parziale 1-regolare. In generale un k -fattore è un grafo parziale k -regolare. Se esiste una partizione di \mathbf{S} costituita da k -fattori, \mathbf{G} dicesi *k -fattorizzabile* e tale partizione dicesi una *k -fattorizzazione* di \mathbf{G} . Una 1-fattorizzazione è una decomposizione in spigoli disgiunti, mentre una 2-fattorizzazione è una decomposizione in cicli disgiunti.

Esempi - 1) Il grafo completo \mathbf{K}_4 sull'insieme $V = \{1, 2, 3, 4\}$ è 1-fattorizzabile e una sua 1-fattorizzazione è la seguente:

F_1	F_2	F_3
1, 2	1, 3	1, 4
3, 4	2, 4	2, 3

2) Il grafo completo \mathbf{K}_6 sull'insieme $V=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ è 1-fattorizzabile e una sua 1-fattorizzazione è la seguente:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
3, 4	2, 5	2, 6	2, 4	2, 3
5, 6	4, 6	3, 5	3, 6	4, 5

3) Il grafo bipartito completo $\mathbf{K}_{3,3}$ su $V_1=\{1, 2, 3\}$, $V_2=\{1', 2', 3'\}$ è 1-fattorizzabile e una sua 1-fattorizzazione è la seguente:

F_1	F_2	F_3
1, 1'	1, 2'	1, 3'
2, 2'	2, 3'	2, 1'
3, 3'	3, 1'	3, 2'

Teorema 4.2. [Tutte, 1947] Un grafo (V, S) ha un 1-fattore se e solo se per ogni $A \subseteq V$, il numero delle componenti connesse di $G \setminus A$ aventi un numero dispari di vertici è al massimo $|A|$.

Un problema di 1-fattorizzazioni di grafi completi o bipartiti si ha nel predisporre un calendario di incontri per un torneo singolo o a squadre. Si possono utilizzare le seguenti costruzioni:

Costruzione 1 - Condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo \mathbf{K}_n completo su un insieme di cardinalità n sia fattorizzabile è che n sia pari. In tal caso, posto $n=2p$, una fattorizzazione di \mathbf{K}_n si ottiene considerando, per ogni $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, l'insieme F_i costituito dallo spigolo $\{i, n\}$ e dagli spigoli aventi per estremi i vertici $i-j, i+j \pmod{n-1}$ al variare di j in $\{1, 2, \dots, p-1\}$. Inoltre, ogni fattorizzazione di \mathbf{K}_n ha $n-1$ fattori.

Esempio - Una fattorizzazione del grafo completo \mathbf{K}_8 sull'insieme $V=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ si può costruire in base all'enunciato del precedente teorema:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1, 8	2, 8	3, 8	4, 8	5, 8	6, 8	7, 8
2, 7	3, 1	4, 2	5, 3	6, 4	7, 5	1, 6
3, 6	4, 7	5, 1	6, 2	7, 3	1, 4	2, 5
4, 5	5, 6	6, 7	7, 1	1, 2	2, 3	3, 4

Ogni fattorizzazione di \mathbf{K}_n con n pari dicesi un *torneo*; ogni fattore dicesi un *turno*.

Costruzione 2 - Ogni grafo $\mathbf{K}_{n,n}$ completo bipartito su due insiemi disgiunti $V_1=\{1, 2, \dots, n\}$, $V_2=\{1', 2', \dots, n'\}$ è fattorizzabile. Una fattorizzazione di $\mathbf{K}_{n,n}$ si ottiene considerando, in corrispondenza di ogni $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, l'insieme F_i costituito dagli spigoli aventi per estremi i vertici $j, (i + j)' \pmod n$ al variare di j in $\{1, 2, \dots, n - 1\}$. Inoltre, ogni fattorizzazione di $\mathbf{K}_{n,n}$ ha n fattori.

Esempio - Una fattorizzazione del grafo bipartito completo $\mathbf{K}_{4,4}$ su $V_1=\{1, 2, 3, 4\}$, $V_2=\{1', 2', 3', 4'\}$ si può costruire in base all'enunciato del precedente teorema:

F_1	F_2	F_3	F_4
1, 2'	1, 3'	1, 4'	1, 1'
2, 3'	2, 4'	2, 1'	2, 2'
3, 4'	3, 1'	3, 2'	3, 3'
4, 1'	4, 2'	4, 3'	4, 4'

Ogni fattorizzazione di $\mathbf{K}_{n,n}$ dicesi un *torneo a squadre*.

Costruzione 3 - Sia \mathbf{K}_n un grafo completo su un insieme V di cardinalità n , con $n=4p$. Data una partizione di V costituita da due sottoinsiemi V_1, V_2 avente ciascuno cardinalità $2p$, esiste una fattorizzazione di \mathbf{K}_n in modo che dei $4p-1$ fattori di tale fattorizzazione, $2p$ siano fattori di una fattorizzazione del grafo bipartito e completo su V_1 e V_2 e ciascuno dei rimanenti $2p-1$ fattori sia unione di un fattore di una fattorizzazione del grafo completo su V_1 e di un fattore di una fattorizzazione del grafo completo su V_2 .

Esempio - Un'altra fattorizzazione del grafo completo \mathbf{K}_8 sull'insieme $V=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ si può costruire in base all'enunciato del precedente teorema:

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7
1, 2	1, 3	1, 4	1, 6	1, 7	1, 8	1, 5
3, 4	2, 4	2, 3	2, 7	2, 8	2, 5	2, 6
5, 6	5, 7	5, 8	3, 8	3, 5	3, 6	3, 7
7, 8	6, 8	6, 7	4, 5	4, 6	4, 7	4, 8

Si può osservare che la fattorizzazione appena ottenuta non è isomorfa a quella che scaturisce applicando la costruzione 1, in quanto quest'ultima non contiene una fattorizzazione di un grafo completo su un insieme di cardinalità 4.

5 Grafi planari

Un grafo si dice planare se può essere rappresentato nel piano in modo tale che due suoi spigoli qualsiasi non si intersechino in punti che non sono vertici. In una rappresentazione planare di un grafo si chiama faccia ogni regione di piano limitata da un ciclo e non contenente catene aperte formate da almeno due spigoli e con estremi che siano vertici del ciclo. In ogni grafo planare esiste anche la faccia esterna o

infinita.

Eulero dimostrò nel 1758 il seguente

Teorema 5.1. *In un grafo planare con p componenti connesse, v vertici, s spigoli, f facce si ha $v + f = s + p + 1$.*

Dimostrazione Sia in un primo momento $p=1$ e procediamo per induzione su s . Se $s=1,2$ la tesi è vera. Sia G un grafo con almeno 3 spigoli. Se G è aciclico la tesi è vera. Se G non è un albero, allora esiste in esso almeno uno spigolo $\{x, y\}$, la cui soppressione non sconnette G . Sia $G' = G - \{x, y\}$. Evidentemente x, y appartengono ad un ciclo che delimita una certa faccia F di G' . Inoltre in G , in luogo della faccia F vi sono due facce F' e F'' , che non sono facce di G' . Detti f', s', v' i numeri di facce, spigoli e vertici di G' , si ha $v = v', s = s' + 1, f = f' + 1$, da cui: $v - s + f = v' - (s' + 1) + f' + 1 = v' - s' + f' = 2$. Sia ora $p > 1$. Per la i -esima componente connessa si ha con ovvio significato dei simboli $v_i - s_i + f_i = 2$ e quindi $\sum (v_i - s_i + f_i) = 2p$. D'altra parte si ha $\sum v_i = v, \sum s_i = s, \sum f_i = f + (p - 1)$, poiché la faccia infinita deve essere contata una sola volta. Sostituendo si ottiene $v - s + f + p - 1 = 2p$, da cui la formula della tesi. \square

Lemma 5.1. *In un grafo planare connesso con v vertici, s spigoli e con tutte le facce delimitate da cicli di lunghezza r , si ha $s = \frac{r(v-2)}{r-2}$.*

Dimostrazione Ogni spigolo appartiene a due r -cicli che delimitano due facce, quindi $2s = rf$, essendo f il numero totale di facce del grafo. Per il teorema di Eulero si ha $v - s + f = 2$, cioè $v - s + \frac{2s}{r} = 2$, da cui la tesi. \square

Teorema 5.2. *In un grafo planare con più di due vertici si ha $s \leq 3v - 6$. Se il grafo non contiene triangoli $s \leq 2v - 4$.*

Dimostrazione Detto massimale un grafo planare tale che aggiungendo un qualsiasi altro spigolo si ottiene un grafo non planare, esso evidentemente è connesso e ha facce triangolari e quindi per il lemma precedente si ha $s = 3v - 6$. Quindi in un qualsiasi grafo planare con più di due vertici si ha $s \leq 3v - 6$. Se il grafo avesse tutte facce cicli di lunghezza 4, per il lemma precedente si avrebbe $s = 2v - 4$ e quindi in un grafo che non contiene triangoli si ha $s \leq 2v - 4$. \square

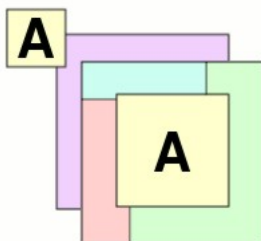
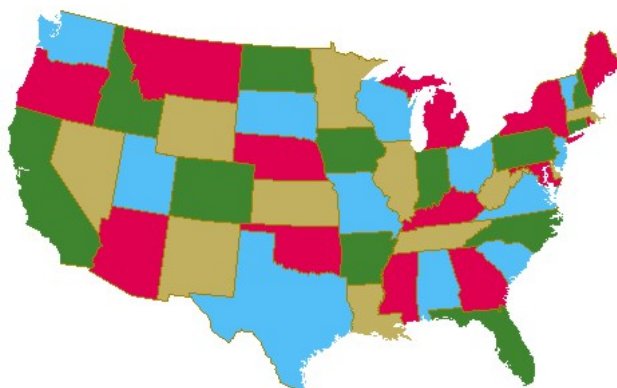
Dal precedente teorema segue che K_5 e K_{33} non sono planari rispettivamente per la prima e per la seconda parte del teorema, poiché K_{33} non ha facce triangolari. Due grafi si dicono omeomorfi se possono essere ottenuti da un medesimo grafo G per suddivisione degli spigoli cioè inserendo nuovi vertici in certi spigoli. Kuratowski dimostrò nel 1930 che un grafo è planare se e solo se non contiene sottografi omeomorfi a K_{33} o a K_5 . Questa proprietà dei grafi planari ha generato il famoso problema (impossibile) di collegare tre case e tre punti diversi di luce, acqua e gas senza che le condutture si intersechino.

Lemma 5.2. *Ogni grafo planare semplice e connesso $G=(V, S)$ ha almeno un vertice avente grado non superiore a 5. Inoltre, se $|V| \geq 4$, G ha almeno tre vertici a due a due distinti aventi grado non superiore a 5.*

Dimostrazione Siano $n=|V|$, $m=|S|$. Se $n < 4$, dato che \mathbf{G} è semplice, per ogni $x \in V$, si ha $d(x) < 3$, e quindi la tesi è conseguita. Se $n \geq 4$, si supponga, per assurdo, che esistano al più due vertici distinti di \mathbf{G} aventi grado non superiore a 5. Ne segue che esistono $n-2$ vertici di \mathbf{G} aventi grado non inferiore a 6; siano x_1, x_2 i rimanenti due vertici di \mathbf{G} . Poichè \mathbf{G} è connesso, si ha $d(x_1) \geq 1$, $d(x_2) \geq 1$, e quindi $2m \geq d(x_1) + d(x_2) + 6(n-2) \geq 6n - 10$, da cui $m \geq 3n - 5 > 3n - 6$, il che contraddice quanto sopra affermato. \square

6 Colorazioni

Il più celebre problema della teoria dei grafi è quello dei quattro colori che fu introdotto nel 1852 da FRANCIS GUTHRIE, il quale si rese conto che erano sufficienti quattro colori per colorare una mappa della Gran Bretagna in modo che due stati confinanti non avessero lo stesso colore. ALFRED KEMPE nel 1879 e PETER TAIT nel 1880 presentarono delle dimostrazioni del teorema dei 4 colori: quattro colori sono sufficienti per colorare qualsiasi carta geografica. Queste dimostrazioni furono però confutate rispettivamente da HEAWOOD nel 1890 e da PETERSEN nel 1891. Heawood dimostrò infatti che la dimostrazione di Kempe prova solo che 5 colori sono sufficienti (teorema dei 5 colori).



Da un punto di vista matematico conviene precisare il concetto di carta geografica: gli stati sono regioni del piano connesse (cioè non sono ammesse *enclavi*), e due stati sono *confinanti* se e solo se hanno

una linea in comune e non soltanto un numero finito di punti (altrimenti una figura a torta sarebbe un controesempio del teorema) KENNETH APPEL e WOLFGANG HAKEN nel 1977 con l'ausilio di potenti calcolatori hanno risolto in modo definitivo la ben nota congettura dei quattro colori, che, sin dal 1852, costituiva uno dei problemi aperti più famosi della matematica discreta. L'utilizzazione del computer nella dimostrazione del teorema ha scatenato una fervente diatriba sull'affidabilità degli algoritmi, arrivando a mettere in dubbio la validità stessa della prova. In pratica, la dimostrazione consiste nel ricondurre una qualsiasi configurazione a un numero finito, anche se molto elevato, di topologie, mediante una serie di trasformazioni che modificano le relative posizioni delle aree interessate ma non le proprietà topologiche della mappa. Il programma, eseguito su due macchine con diversi algoritmi, verificava che per ciascuna di queste configurazioni esiste una colorazione che impiega non più di quattro colori.

L'analisi di casi discreti per mezzo del calcolatore solleva dubbi sul fatto che non sussiste la certezza che un algoritmo sia stato implementato correttamente. Infatti, non è possibile dimostrare la correttezza di un algoritmo ma solo la sua non correttezza, mediante una controprova. Ad ogni modo, nell'algoritmo non è stato riscontrato alcun errore.

Altre due dimostrazioni potenzialmente indipendenti sono state proposte nel 1996 e nel 1998. Una dimostrazione non ancora verificata di sole 12 pagine è stata infine proposta nel 2004.

Sia $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ un grafo. Dato un insieme non vuoto e finito C (detto *insieme di colori*), ogni mappa $f:V \rightarrow C$ tale che, per ogni coppia di vertici adiacenti x, y di \mathbf{G} , si ha $f(x) \neq f(y)$, dicesi una *colorazione dei vertici* di \mathbf{G} . In tal caso, posto $k=|f(V)|$, si suole dire che \mathbf{G} è *k-colorabile* e che f è una *k-colorazione* di \mathbf{G} .

Il minimo numero $k \in \mathbb{N}$ per cui \mathbf{G} è *k-colorabile* dicesi *numero cromatico* di \mathbf{G} e si denota con il simbolo $\chi(\mathbf{G})$. Evidentemente, $\chi(\mathbf{G})=k$ se e solo se \mathbf{G} è *k-colorabile* ma non *k-1-colorabile*.

Un problema sul numero cromatico è quello del diario degli esami universitari: Qual'è il minimo numero di giorni necessario per far sostenere ad n studenti m esami, in maniera tale che nessuno studente debba sostenere due esami lo stesso giorno? Analogo è il problema dell'assegnazione di frequenze televisive.

Sia $\mathbf{G}=(V, \mathbf{S})$ un grafo e sia \mathbf{G}' un qualunque grafo ottenuto da \mathbf{G} considerando, per ogni coppia di vertici adiacenti di \mathbf{G} , uno e un solo spigolo incidente in tali vertici. Ovviamente, \mathbf{G}' è semplice, e una mappa $f:V \rightarrow C$ è una *k-colorazione* dei vertici di \mathbf{G} se e solo se essa è una *k-colorazione* dei vertici di \mathbf{G}' , cosicchè $\chi(\mathbf{G})=\chi(\mathbf{G}')$. Dunque nello studio delle colorazioni dei vertici di un grafo, si può supporre, senza ledere in alcun modo la generalità della trattazione, che il grafo sia semplice.

Analogamente si può definire una colorazione degli spigoli di un grafo in maniera tale che due spigoli incidenti nello stesso vertice non abbiano lo stesso colore. Il minimo numero di colori necessario è chiamato indice cromatico del grafo.

Il problema delle passeggiate delle ragazze di un collegio in fila per due in maniera che due ragazze non passeggino in coppia più di una volta che si poneva nell'800 il rev. Kirkman è un problema sull'indice cromatico, così come il problema dell'esistenza di un quadrato latino di ordine n può essere ricondotto al

calcolo di un indice cromatico.

Esistono diversi algoritmi che consentono di determinare il numero cromatico di un grafo semplice. Uno dei più importanti è basato sul cosiddetto *principio di connessione-contrazione* e permette altresì di determinare tutte le possibili colorazioni di un grafo a meno di una permutazione dell'insieme dei colori. Sia G un grafo semplice non completo e siano x, y vertici distinti non adiacenti di G . Il grafo $G \cup \{x, y\}$ si indica con $G + xy$ e si dice ottenuto da G applicando l'operatore di connessione, mentre si dice che si applica l'operatore di contrazione eliminando il vertice y e connettendo il vertice x con tutti i vertici che erano adiacenti ad y ma non ad x . Si ottiene in tal modo il grafo G/xy . Se f è una k -colorazione di G e x, y sono due vertici non adiacenti di G , allora, se $f(x) \neq f(y)$, f è una k -colorazione di $G + xy$, mentre, se $f(x) = f(y)$, f è una k -colorazione di G/xy . Da quest'ultima considerazione trae validità il seguente algoritmo.

Algoritmo per la determinazione del numero cromatico - Sia $G=(V, S)$ un grafo semplice. Se G è completo, esso ammette solo la colorazione che associa ai vertici di G colori a due a due distinti e quindi il numero cromatico coincide con il numero di vertici. Se G non è completo, si consideri l'albero binario formale di radice G e avente per vertici tutti i grafi ottenuti da G individuando, ad ogni passo, un'arbitraria coppia di vertici non adiacenti e applicando, finché non si perviene a un grafo completo, gli operatori di connessione e contrazione.

L'insieme costituito dalle foglie dell'albero binario su definito dicesi una *scomposizione di G in classi di colorazione* o una *C-scomposizione di G* e si denota con il simbolo $C(G)$.

Teorema 6.1. *Sia G un grafo semplice non completo.*

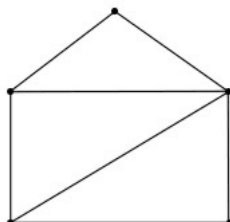
- i) -L'insieme $C(G)$ è costituito da grafi completi;*
- ii) -Il numero cromatico di G coincide con il minimo dell'insieme costituito dal numero dei vertici dei grafi di $C(G)$;*
- iii) -Il numero dei grafi completi di $C(G)$ aventi lo stesso numero di vertici r rappresenta il numero delle possibili r -colorazioni dei vertici di G a meno di una permutazione di colori;*
- iv) -Ognuna delle predette colorazioni si ottiene assegnando colori a due a due distinti ai vertici di ciascuno dei grafi di $C(G)$ e lo stesso colore agli eventuali vertici su cui si è applicato l'operatore di contrazione.*

Siano $n=|V|$, $\chi=\chi(G)$. Per quanto sopra, G non può essere k -colorabile quando $k > n$ o $k < \chi$, e quindi, per il teorema precedente, in $C(G)$ non possono esistere grafi completi con un numero di vertici $k > n$ o $k < \chi$. Indicando, per ogni $r \in N$, $\chi \leq r \leq n$, con il simbolo a_r il numero di grafi di $C(G)$ il cui insieme di vertici ha cardinalità r , si suole scrivere formalmente:

$$C(G) = a_n \mathbf{K}_n + a_{n-1} \mathbf{K}_{n-1} + \dots + a_\chi \mathbf{K}_\chi$$

In tale espressione, si ha ovviamente $a_n \neq 0$, $a_\chi \neq 0$.

Esempio - Determinare, mediante applicazione dell'algoritmo, la scomposizione in classi di colorazione del grafo rappresentato nella figura seguente.



Si trova che il numero cromatico del grafo è 3 e che sono ammesse una 5-colorazione, tre 4-colorazioni e una 3-colorazione, cosicchè la scomposizione del grafo in classi di colorazione è $\mathbf{K}_5 + 3\mathbf{K}_4 + \mathbf{K}_3$.

Allo scopo di trovare altre relazioni sul numero cromatico, dimostriamo questo lemma elementare:

Lemma 6.1. *Dato un insieme di numeri naturali, in esso ne esiste uno che non è minore della media aritmetica dell'insieme stesso.*

Dimostrazione Diciamo $A = \{x_1, \dots, x_k\}$ l'insieme, M la sua media aritmetica e supponiamo per assurdo che $x_i < M, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Ne seguirebbe $\sum x_i < kM$ e quindi $\frac{\sum x_i}{k} < M$, assurdo per definizione di media aritmetica. \square

La densità $\omega(G)$ di un grafo G è la massima cardinalità di una clique (cioè di un sottografo completo) contenuta in G , mentre il numero di stabilità $\alpha(G)$ è la massima cardinalità di un insieme stabile W , cioè di un insieme di vertici totalmente sconnessi fra loro (=non esiste una coppia di vertici di W connessi da uno spigolo). Essi sono legati al numero cromatico dalle seguenti relazioni:

Teorema 6.2. *In un qualsiasi grafo si ha $\chi(G) \geq \omega(G)$ e $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$*

Dimostrazione Dal principio dei cassetti segue immediatamente che $\chi(G) \geq \omega(G)$, poiché tutti i vertici di una clique devono avere colori diversi. Inoltre, poichè una colorazione di un grafo G partiziona i suoi vertici in classi di colori che sono insiemi stabili, la cardinalità media di un insieme stabile è $|V(G)|/\chi(G)$. Allora, per il lemma 6.1, esiste un insieme stabile di cardinalità almeno $|V(G)|/\chi(G)$, cioè $\alpha(G) \geq |V(G)|/\chi(G)$ e quindi $\chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$. \square

Esercizio: In un grande ufficio ci sono 15 computer e 10 stampanti. Noi vogliamo connettere i computer alle stampanti in maniera tale che, sapendo che mai più di dieci computer chiedono contemporaneamente di stampare, un computer possa sempre trovare una stampante libera, eventualmente deviando altri computer che lo chiedono contemporaneamente. Realizzare questo network con il minimo numero di connessioni possibile.

Siamo così in grado di provare il sopracitato

Teorema 6.3. *[Teorema dei 5 colori] Per ogni grafo planare G , si ha $\chi(G) \leq 5$.*

Dimostrazione Si può supporre che \mathbf{G} sia semplice. Supponiamo inoltre, in un primo tempo, che \mathbf{G} sia anche connesso.

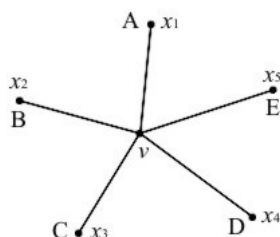
In base alla definizione di numero cromatico, basta provare che esiste una k -colorazione di \mathbf{G} , con $k \leq 5$. Sia $n=|V|$ e si dimostri il teorema per induzione osservando che, se $n < 5$, la tesi è immediatamente conseguita. Se $n > 5$, si supponga che la tesi sia vera per ogni grafo planare semplice avente $n-1$ vertici. Per il teorema precedente, esiste almeno un vertice v di \mathbf{G} tale che $d(v) \leq 5$, e, per l'ipotesi induttiva, $\chi(\mathbf{G}-v) \leq 5$, cosicchè esiste una k -colorazione f dei vertici di $\mathbf{G}-v$, con $k \leq 5$.

Si possono verificare due casi: 1) $d(v) < 5$; 2) $d(v) = 5$.

Nel primo caso, esistono al più quattro vertici di \mathbf{G} adiacenti a v , e quindi è possibile estendere la colorazione f ai vertici di \mathbf{G} assegnando a v un colore distinto da tutti quelli che f associa ai vertici ad esso adiacenti, ottenendo una k colorazione dei vertici di \mathbf{G} con $k \leq 5$.

Nel secondo caso, possono verificarsi due sottocasi: 2a) f associa lo stesso colore ad almeno due vertici adiacenti a v ; 2b) f associa ai cinque vertici adiacenti a v colori a due a due distinti.

Nel caso 2a) si può ripetere esattamente quanto affermato per il caso 1).



Consideriamo il caso 2b) e indichiamo con x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 i vertici adiacenti a v , ponendo $f(x_1)=A$, $f(x_2)=B$, $f(x_3)=C$, $f(x_4)=D$, $f(x_5)=E$. Siano \mathbf{H}_{AC} il sottografo di $\mathbf{G}-v$ costituito da tutti i vertici a cui f associa il colore A o il colore C e $\mathbf{H}_{AC}(x_1)$ la componente connessa di \mathbf{H}_{AC} contenente il vertice x_1 . Si possono presentare i seguenti due casi: 2b1) Non esiste un cammino di \mathbf{H}_{AC} congiungente x_1 con x_3 (ossia x_1 e x_3 non sono vertici di una stessa componente connessa di \mathbf{H}_{AC}); 2b2) Esiste un cammino π_{13} di \mathbf{H}_{AC} congiungente x_1 con x_3 (ossia x_1 e x_3 sono vertici della stessa componente connessa di \mathbf{H}_{AC}).

Nel primo caso è possibile definire una 5-colorazione g dei vertici di \mathbf{G} mediante le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} g(x) &= C \text{ se } x \text{ è vertice di } \mathbf{H}_{AC}(x_1) \text{ e } f(x) = A \\ g(x) &= A \text{ se } x \text{ è vertice di } \mathbf{H}_{AC}(x_1) \text{ e } f(x) = C \\ g(x) &= f(x) \text{ se } x \text{ non è vertice di } \mathbf{H}_{AC}(x_1) \\ g(x) &= A \text{ se } x = v \end{aligned}$$

Nel secondo caso, siano \mathbf{H}_{BD} il sottografo di $\mathbf{G}-v$ costituito da tutti i vertici cui f associa il colore B o il colore D e $\mathbf{H}_{BD}(x_2)$ la componente connessa di \mathbf{H}_{BD} contenente il vertice x_2 . Poiché \mathbf{G} è planare non esiste un cammino π_{24} di \mathbf{H}_{BD} congiungente x_2 con x_4 , perchè, altrimenti, π_{13} e π_{24} avrebbero almeno

un vertice in comune, il che è falso, in quanto a ogni vertice di π_{13} f associa il colore A o il colore C , mentre ad ogni vertice di π_{24} f associa il colore B o il colore D .

Quindi è possibile, in maniera del tutto analoga al caso precedente, definire una 5-colorazione dei vertici di \mathbf{G} mediante le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} g(x)=D & \text{ se } x \text{ è vertice di } \mathbf{H}_{BD}(x_2) \text{ e } f(x)=B \\ g(x)=B & \text{ se } x \text{ è vertice di } \mathbf{H}_{BD}(x_2) \text{ e } f(x)=D \\ g(x)=f(x) & \text{ se } x \text{ non è vertice di } \mathbf{H}_{BD}(x_2) \\ g(x)=B & \text{ se } x=v \end{aligned}$$

Se \mathbf{G} non è connesso, si considerino le sue componenti connesse. Per ciascuna di esse vale ovviamente l'asserto, e quindi si ha, in ogni caso, $\chi(\mathbf{G}) \leq 5$. □

7 Grafi di confusione

Nella teoria della comunicazione, un canale rumoroso produce un grafo di confusione, un grafo i cui vertici sono elementi di un alfabeto di trasmissione T e che ha uno spigolo fra due lettere di T se e solo se, quando vengono inviate attraverso il canale, possono essere ricevute come la stessa lettera. Dato un canale rumoroso, scegliendo nel suo grafo di confusione un insieme stabile, si ottiene un alfabeto non ambiguo per inviare i messaggi. Il numero di stabilità $\alpha(G)$ di un grafo di confusione indica dunque la massima cardinalità di un alfabeto non ambiguo in quel canale rumoroso. Possiamo però trovare un alfabeto non ambiguo più ampio utilizzando combinazioni di lettere. Utilizzando ad esempio coppie di lettere dell'alfabeto T si ha che due stringhe xy e uv possono essere confuse se e solo se vale una delle seguenti condizioni:

1. x,u possono essere confuse e y,v possono essere confuse;
2. $x=u$ e y,v possono essere confuse;
3. $y=v$ e x,u possono essere confuse.

Ciò ci suggerisce di introdurre la seguente definizione: Dati due grafi G,H il prodotto normale $G \cdot H$ dei due grafi è un grafo che ha come vertici gli elementi del prodotto cartesiano $V(G) \times V(H)$ e tale che esiste uno spigolo fra (a,b) e (c,d) se e solo se vale una di queste condizioni:

1. $(a, c) \in E(G)$ e $(b, d) \in E(H)$;
2. $a=c$ e $(b, d) \in E(H)$;
3. $b=d$ e $(a, c) \in E(G)$.

In questo modo se G è il grafo di confusione dell'alfabeto T , il grafo di confusione del nuovo alfabeto è $G \cdot G$. Ma qual'è il legame fra i numeri di stabilità dei grafi fattori e del grafo prodotto? Per rispondere a tale domanda, occorre premettere il teorema di Ramsey del 1930. Si dice che un numero naturale N ha

la proprietà di Ramsey (p,q) , con p,q naturali maggiori di 1, se un qualsiasi grafo con N vertici ha o una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici. Il minimo di tali numeri si dice numero di Ramsey e si indica con il simbolo $R(p,q)$.

Teorema 7.1. *Un numero naturale N ha la proprietà di Ramsey (p,q) se e solo se colorando con soli due colori gli spigoli di K_N , esso ha una clique di ordine p di un colore oppure di ordine q dell'altro colore.*

Dimostrazione Supponiamo che N abbia la proprietà di Ramsey (p,q) , allora un qualsiasi grafo con N vertici ha o una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici. Consideriamo una colorazione di spigoli di K_N con rosso e blu e sia G il sottografo costituito da tutti gli N vertici e dai soli spigoli colorati in rosso. Applicando ad esso la proprietà di Ramsey si ottiene o una clique rossa di ordine p oppure un insieme stabile in G che quindi è una clique blu di ordine q .

Viceversa, consideriamo un grafo qualsiasi grafo G con N vertici. Coloriamo tutti i suoi spigoli di rosso e completiamolo ad un K_N , colorando di blu gli altri spigoli. Allora per ipotesi il nuovo grafo ha una clique rossa di p vertici oppure una clique blu di q vertici. Ciò equivale a dire che G ha o una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici. \square

Lemma 7.1. *Se $p_1 + p_2 + \dots + p_k - k + 1$ oggetti sono contenuti in k cassette, allora esiste un cassetto che contiene almeno p_i oggetti per un certo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.*

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che il cassetto i -esimo contenga al massimo $p_i - 1$ oggetti, allora il numero totale di oggetti è al massimo $p_1 + p_2 + \dots + p_k - k$, contro l'ipotesi. \square

Teorema 7.2. *Per ogni coppia di numeri naturali p,q maggiori di 1, esiste $R(p,q)$ e, se p,q sono maggiori di 2 si ha anche $R(p,q) \leq R(p,q-1) + R(p-1,q)$.*

Dimostrazione Sia $k = p + q \geq 4$. Ragioniamo per induzione su k . Dalla definizione segue che $R(2,q)=q$ e $R(p,2)=p$ per ogni valore di p,q maggiore di 1. Siano allora p,q entrambi maggiori di 2 e quindi $k > 4$; per l'ipotesi induttiva esistono $R(p,q-1)$, $R(p-1,q)$. Sia G un grafo di $R(p,q-1)+R(p-1,q)$ vertici e fissiamo un vertice v in G . Sia C l'insieme dei vertici adiacenti a v in G e $D = V(G) \setminus (C \cup \{v\})$. Poiché il numero di vertici diversi da v è $R(p,q-1) + R(p-1,q) - 1$, il lemma 7.1 implica che C ha almeno $R(p-1,q)$ vertici oppure D ha almeno $R(p,q-1)$ vertici. Se accade la prima evenienza il sottografo di G generato dai vertici in C ha una clique di $p-1$ vertici oppure un insieme stabile di q vertici. Poiché v è adiacente a tutti i vertici di D , il sottografo di G generato dai vertici di $C \cup \{v\}$ ha una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici. Quindi G ha una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici e dunque esiste $R(p,q)$ e $R(p,q) \leq R(p,q-1) + R(p-1,q)$. Se accade la seconda evenienza, per definizione di $R(p,q-1)$, il sottografo di G generato dai vertici in D ha una clique di p vertici oppure un insieme stabile di $q-1$ vertici. Poiché v non è adiacente a nessun vertice di D , il sottografo di G generato dai vertici di $D \cup \{v\}$ ha una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici. Quindi G ha una clique di p vertici o un insieme stabile di q vertici e dunque esiste $R(p,q)$ e $R(p,q) \leq R(p,q-1) + R(p-1,q)$. \square

Possiamo ora rispondere alla domanda posta con il seguente teorema dimostrato da Herdrin nel 1966:

Teorema 7.3. *Se G, H sono due grafi, allora $\alpha(G \cdot H) \leq R(\alpha(G) + 1, \alpha(H) + 1) - 1$*

Dimostrazione Sia $N = R(\alpha(G) + 1, \alpha(H) + 1)$. Supponiamo che $\alpha(G \cdot H) \geq N$. Sia I un insieme stabile di $G \cdot H$ con N vertici. Supponiamo che (a, b) e (c, d) sono due vertici distinti in I . Poichè I è stabile,

1. $a \neq c \wedge (a, c) \notin E(G)$
2. oppure $b \neq d \wedge (b, d) \notin E(H)$.

Consideriamo un grafo completo il cui insieme di vertici sia I . Coloriamo lo spigolo $((a, b), (c, d))$ blu se vale la prima condizione e rosso se vale la seconda. Ma allora, per il teorema 7.1, c'è o una clique blu C con $\alpha(G) + 1$ vertici oppure una clique rossa con $\alpha(H) + 1$ vertici. Nel primo caso, $(a, b) \in C$ e $(c, d) \in C$ implicano che vale la prima condizione e quindi $\{a : a \in V(G) \wedge (a, b) \in C \text{ for some } b\}$ è un insieme stabile di G con $\alpha(G) + 1$ vertici. Questa è una contraddizione. Nel secondo caso, $\{b : b \in V(H) \wedge (a, b) \in D \text{ for some } a\}$ è un insieme stabile di H con $\alpha(H) + 1$ vertici. Anche questa è una contraddizione. Se ne conclude che $\alpha(G \cdot H) \leq N - 1$. \square

Utilizzando stringhe di lunghezza k , si ottengono insiemi stabili nel grafo $G^k = G \cdot G \cdot G \dots \cdot G$ e quindi alfabeti non ambigui sempre più grandi, ma a costo dell'efficienza: le stringhe sono più lunghe. Per questo motivo Shannon nel 1956 introdusse la seguente definizione di capacità di un grafo: $c(G) = \sup_k \sqrt[k]{\alpha(G^k)}$.